WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Странная привлекательность хаоса

А. К. ДЬЮДНИ

ХАОС ОБЛАДАЕТ странной привлекательностью для ума, способного увидеть в нем закономерности. Некоторые физические системы в своем хаотическом поведении в каком-то смысле стремятся к упорядоченности, в которой мы наблюдаем такие закономерности. К тому же внешние проявления этих закономерностей сами по себе кажутся нам какими-то странно привлекательными. Кое-кто из читателей уже, наверное, знает, что геометрические формы, лежащие в основе хаоса, называются странными, или хаотическими, аттракторами (см.: Дж. П. Кратчфилд, Дж. Д. Фармер, Н. Х. Пэкард, Р. Шоу. Хаос, «В мире науки», 1987, № 2). Странные аттракторы (от англ. attractive — привлекательный, притягательный) можно генерировать и с помощью персонального компьютера.

Но прежде чем отправиться в страну хаоса, читателям нужно вооружиться необходимыми доспехами — интуитивным пониманием основных физических понятий, которые нам встретятся. В частности, что такое аттрактор? Грубо говоря, аттрактор — это обобщение понятия равновесия, это то состояние, к которому приходит в конце концов система, то, к чему она притягивается. Простым примером физической системы, иллюстрирующей понятие аттрактора, служит маятник. Представим обычный движущийся маятник, который под воздействием сил трения замедляется и в конце концов останавливается. Движение маятника можно описать посредством так называемой фазовой диаграммы, или диаграммы состояний, по одной оси которой откладывается угол, составляемый маятником с вертикалью, а по другой — скорость изменения этого угла. Движение качающегося маятника на фазовой диаграмме представляется точкой, движущейся вокруг начала отсчета. По мере того как маятник теряет энергию, эта точка приближается по спирали к точке начала отсчета, где в конце концов и останавливается. В данном случае начало отсчета выступает в роли аттрактора, поскольку оно как бы притягивает к себе точку, представляющую движение маятника на фазовой диаграмме. Конечно, в аттракторе, состоящем из одной-единственной точки, нет ничего странного.

Несколько более замысловатый аттрактор характеризует движение старинных настенных часов с грузом на цепочке. Груз играет роль механизма, подкачивающего энергию к маятнику, благодаря чему он не замедляет своего движения. Если запустить часы энергичным толчком маятника, он замедляется до темпа, обусловленного механизмом груза, и затем характер его движения остается неизменным. Однако если запустить часы слабым толчком, то маятник ведет себя подобно обычному, энергетически независимому маятнику — он постепенно замедляется и останавливается. В случае слишком сильного начального толчка движение маятника на фазовой диаграмме представляется спиралью, обвивающейся все более плотно вокруг круговой орбиты. Здесь аттрактор является кругом. И в данном случае окружность не кажется нам более странным объектом, чем точка.

Обыкновенному маятнику можно придать хаотическое поведение, подвергнув его вертикальной вибрации: если точка подвеса начнет двигаться вверх и вниз, совершая гармонические колебания под действием электромотора, то маятник может качаться совершенно непредсказуемым образом, без всяких признаков периодичности.

Однако, чтобы синтезировать хаос, я выбрал другую физическую систему, а именно три усилителя, первый из которых выдает на выходе сигнал x, поступающий на два других усилителя. Второй усилитель выдает сигнал $1—x$, имея на входе x. На вход третьего усилителя поступают два сигнала: x и $1—x$. На выходе он выдает произведение входных сигналов $x(1 - x)$, которое подается на вход первого усилителя. Сюда же подается управляющее напряжение r. Эту систему завершает еще один компонент — устройство, на короткие промежутки времени выдающее на выходе тот сигнал, который в данный момент поступает ему на вход. Это устройство находится на выходе первого усилителя. Описанная электронная схема из трех усилителей порождает танец напряжения, который становится все более неистовым по мере того, как управляющее напряжение r постепенно увеличивается.

При r меньше 3 и первоначальном ненулевом значении x схема в течение короткого времени выдает осциллирующий сигнал, но затем приходит к некоторому фиксированному значению x, которое остается уже неизменным. Это значение представляет собой аттрактор в виде одной точки. Если управляющее напряжение r повысить до уровня, несколько превышающего 3, сигнал начинает колебаться между двумя значениями x. На этом уровне r о системе можно сказать, что она бистабильна и что аттрактор состоит из двух точек. При дальнейшем увеличении r сигнал колеблется уже около четырех точек. Если увеличить r еще больше, мы придем к аттрактору из восьми точек и т. д. При каждом небольшом повороте ручки, управляющей напряжением r, число точек удваивается, а когда напряжение достигает определенного значения, лежащего приблизительно посередине между 3 и 4, сигнал, вырабатываемый схемой, внезапно «сходит с ума». С огромной электронной скоростью он начинает бесконечно гоняться за простыми, повторяющимися закономерностями, которые были присущи ему ранее. Теперь его поведение управляется странным аттрактором, обладающим потенциально бесконечным количеством значений. В результате получается хаос.

Читатели, знакомые с электроникой, возможно, захотят сами собрать подобную схему. Другие же смогут смоделировать ее на компьютере (неважно, большом или маленьком) и увидеть этот танец во всей его красе на экране дисплея. Для этого нужно написать простую программу, решающую итерационным методом уравнение $x \leftarrow x(1 - x)$. Программа, которую я назову CHAOS1, имеет ядро, состоящее из шести инструкций:

```
x ← 0,3
for i ← 1 to 200
    x ← rx (1 − x)
for i ← 1 to 300
    x ← rx (1 − x)
    plot (200x, 100)
```

Исходное значение переменной x равно 0,3. Сначала программа CHAOS1 входит в цикл, итерирующий основное уравнение 200 раз, чтобы выйти из промежуточного, неустановившегося режима. Этот неустановившийся режим присущ свойствам самого уравнения и не является результатом приближенных вычислений. Причина этого явления будет пояснена ниже в

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

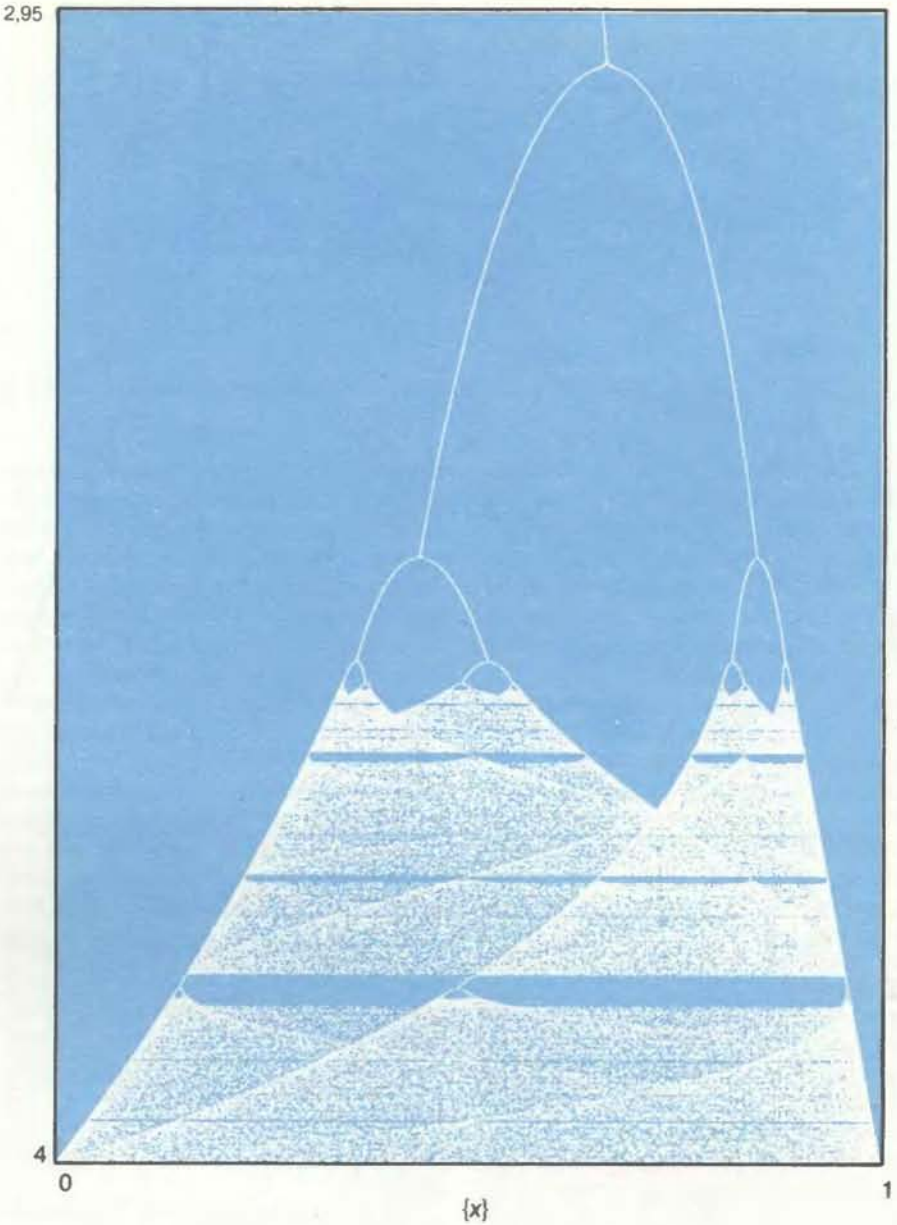
геометрической интерпретации. Затем программа входит в новый цикл, итерирующий уравнение еще 300 раз и высвечивающий каждое значение x на экране.

Параметр 100 в графической инструкции plot приведенного выше алгоритма принят произвольно; в данном случае экран имеет размеры 200 на 200. Горизонтальная координата 200 x распределяет вычисленные значения x (всегда находящиеся в интервале от 0 до 1) вдоль одной строки на экране, установленной на высоте 100 — как раз посередине гипотетического экрана.

В зависимости от устанавливаемого значения управляющего параметра r программа высветит либо одну и ту же точку на экране 300 раз, либо несколько точек, меньше чем 300 раз каждую. Она может даже попытаться уловить хаос, высвечивая 300 различных точек странного аттрактора. Если увеличить число шагов итерационного процесса, картина странного аттрактора будет уже полнее. В любом случае, после того как итерационный процесс установился, значения x начинают прыгать систематическим образом от одной точки аттрактора к другой. Аттракторы называют также орбитами независимо от того, конечно или бесконечно количество их точек.

Полная картина поведения рассмотренной простой схемы с усилителями возникает по мере того, как программа строит ряд изображений, расположенных одно под другим (см. рисунок справа). Эти изображения соответствуют ряду значений управляющего параметра r, изменяющихся от 2,9 до 4,0, скажем, за 200 шагов от верхнего до нижнего края экрана. Более изящную картинку можно получить, если увеличить число шагов, скажем, до 4000, однако в этом случае диаграмма не поместится ни на каком экране, и чтобы увидеть ее целиком, нужно распечатать ее на бумаге.

При значениях r, меньших 3,56 (более точное значение этого порога равно 3,56994571869), аттракторы нашей простой динамической системы, запечатленной в итерационном уравнении $x \leftarrow x(1 - x)$, состоят из нескольких точек. Эти точки, представляющие нехаотическое поведение, образуют три большие полосы и бесконечное количество полос меньшего размера. Аттракторы становятся странными, когда значение r приближается к 3,56. Здесь начинается хаос; до этого плавно разветвлявшиеся линии внезапно превращаются в сумасшедшие зигзаги и россыпи. Странно и то, что хаотическое поведение время от времени прерывается, по мере того как значение r продолжает приближаться к 4.



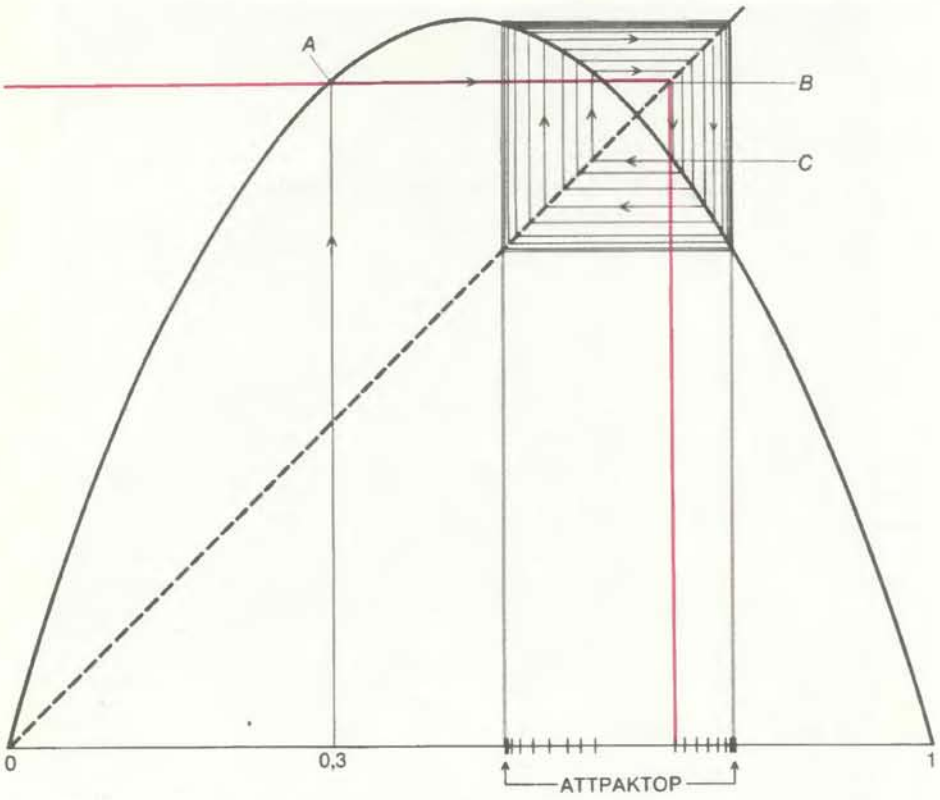
На бифуркационной диаграмме показан переход к хаосу

Получаемое таким образом изображение называется бифуркационной диаграммой. Если посмотреть на нее немного сбоку, то можно, наверное, подумать, что это хаотический спектр звезды x. Изображение украшено кривыми линиями и привлекательными теневыми складками. Почему диаграмма обладает такими декоративными свойствами — загадка, которую можно объяснить только при помощи теории хаоса. Мы еще коснемся этой темы ниже. А пока читателей, наверное, волнует другая загадка: почему это, казалось бы, невинное уравнение ведет себя так странно?

Поведение уравнения при нехаотических значениях параметра r может быть промоделировано геометрически, если мы нарисуем параболу, описываемую уравнением $y = rx(1 - x)$, где x — значение по оси абсцисс, а y — значение по оси ординат. Наложим на эту параболу прямую линию $y = x$. Описываемая процедура прослеживается на верхнем рисунке на с. 98, где значение r установлено равным 3,3 и аттрактор системы состоит из двух точек. Чтобы показать, как ведет себя система, было выбрано начальное значение x. Я принял его равным 0,3, хотя можно было с таким же успехом выбрать любое другое значение.

Первая итерация для уравнения моделируется проведением вертикальной линии, начинающейся в точке $x = 0,3$ в основании графика. Мы продолжаем эту линию до тех пор, пока она не дойдет до графика параболы. Точку, в которой линия касается параболы, обозначим A. Высота этой точки равна соответствующему значению координаты y. На втором шаге итерационного процесса это значение y вводится обратно в уравнение в качестве значения переменной x. Графически эта процедура соответствует измерению высоты пересечения

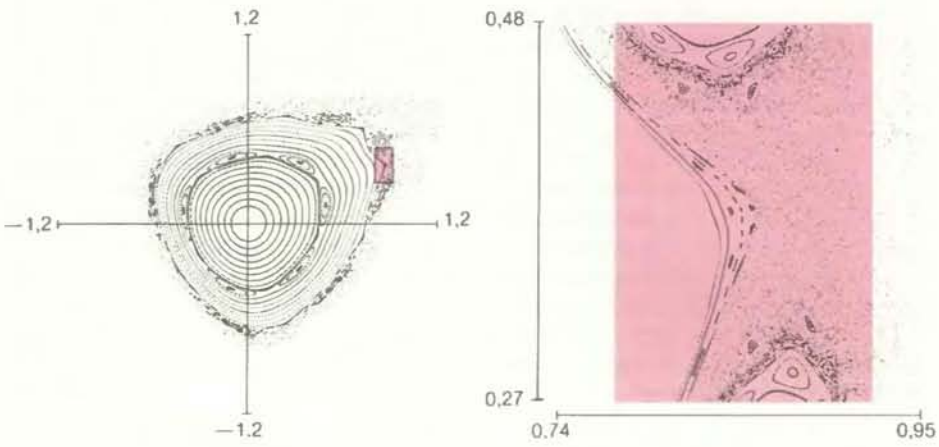
WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU



Геометрическое моделирование простой системы приводит к возникновению двухточечного аттрактора

вертикальной прямой и параболы, откладыванию измеренного расстояния по горизонтальной оси и проведению новой вертикальной линии от полученной отметки на горизонтальной оси до пересечения с параболой. Здесь эта процедура проводится в сокращенной версии, путем проведения горизонтальной линии от точки A до диагональной прямой $y = x$. Новую точку пересечения обозначим B. Заметим, что точка B и точка начала отсчета находятся в диагонально противоположных углах квадрата, сторона которого равна значению y, полученному на первом шаге итераций. Поэтому значение y снова можно ввести в систему, проведя вертикальную линию из точки B до пересечения с параболой (в точке C). Постоянно повторяя процедуру проведения вертикальных прямых до пересечения с параболой и горизонтальных линий до пересечения с диагональной прямой, мы получаем прямоугольные траектории, стремящиеся как бы по спирали к квадрату.

Наша геометрическая процедура шаг за шагом имитирует алгоритм программы CHAOS1. Те две точки, в которых результирующий квадрат пересекает параболу, соответствуют двухточечному аттрактору. Предприимчивые программисты, возможно, заинтересуются задачей генерирования подобных рисунков на компьютере. Если они это сделают, то, наверное, смогут глубже понять природу рассматриваемого нами «простого» итерационного уравнения. Интересно, как будут выглядеть рисунки, когда наступит хаос? Значения параметра r, приводящие к хаотическому поведению, выглядят случайными, но являются ли они на самом деле случайными?



Последовательные орбиты отображения Энона (слева) *вырождаются в хаос* (справа)

Идеей совершить путешествие в страну хаоса я обязан группе читателей, среди которых был и Дж. П. Кратчфилд, один из авторов статьи «Хаос», о которой мы уже упоминали. Как объясняют Кратчфилд и его коллеги, соавторы статьи, «ключ к пониманию хаотического поведения лежит в понимании простых операций растяжения и свертывания, происходящих в пространстве состояний». В рассмотренном примере простой системы усилителей пространство состояний соответствует отрезку линии, содержащему точки аттрактора и точку, представляющую текущее значение x. Где тут возникает растяжение и свертывание?

Итерирование уравнения $x \leftarrow rx(1 - x)$ сводится к отображению точек на отрезке между 0 и 1 в участок параболической кривой. Точки, расположенные поблизости друг от друга на единичном отрезке, в особенности те, что лежат в окрестности 0, оказываются разнесенными дальше друг от друга, когда они отображаются на параболическую кривую. Это происходит, конечно, тогда, когда число $rx(1 - x)$ заменяет x. Свертывание возникает благодаря симметричности параболы; кроме вершины параболы для любого значения $rx(1 - x)$ всегда можно найти две точки единичного отрезка, отображающиеся в это значение. Это, конечно, точки x и $1 - x$.

Структура бифуркационной диаграммы была довольно подробно исследована теоретиками. Границы областей хаотического поведения устанавливаются максимальным и минимальным значениями, итерируемыми от $x = 0{,}5$. Кривые, за которыми следуют минимумы и максимумы, а также кривые, за которыми следуют «вуали», так причудливо свешивающиеся в хаотических областях, являются графиками простых полиномов по r. В местах наибольшего сгущения тени наблюдается самая высокая концентрация точек странных аттракторов. В пустых полосах, упомянутых выше, хаос уступает место порядку. Теория говорит, что для каждого целого числа существует полоса (она может быть сколь угодно узкой) с орбитами точно такого размера. Наконец, читателей, знакомых со свойствами хаоса, наверное, не удивит тот факт, что

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Отображение Энона генерирует различные фигуры при a = *0,264* (слева) *и* a = *1,5732* (справа)

странные аттракторы, даже в такой простенькой системе, которую мы исследовали, обладают фрактальной природой: рисунок из бесконечного числа точек имеет интересные узоры, повторяющиеся при любой степени увеличения рисунка, подобно множеству Мандельброта, описанному в журнале «В мире науки», 1985, № 10.

Более сложные динамические системы описываются уравнениями Энона, названными так в честь французского математика Мишеля Энона. Так называемые отображения Энона не только описывают физические системы, подобные движущимся астероидам или капающим водопроводным кранам, но генерируют также чудесные изображения. Отображение Энона состоит из пары уравнений. Рассмотрим следующий пример:

$$x \leftarrow x\cos a - (y - x^2)\sin a$$
$$y \leftarrow x\sin a + (y - x^2)\cos a$$

По текущим значениям двух переменных x и y в правых частях уравнений вычисляются новые значения (также обозначаемые через x и y) в левых частях.

В программе CHAOS2 эти два уравнения используются для создания изображений порядка и хаоса, присущих широкому классу динамических систем. Основной фрагмент программы CHAOS2 очень похож на аналогичный фрагмент программы CHAOS1:

```
input x, y
for i ← 1 to 1000
  xx ← xcosa − (y − x^2)sina
  y ← xsina + (y − x^2)cosa
  x ← xx
  plot (100x, 100y)
```

Различия между этими программами объясняются двумя причинами: в программе CHAOS2 мы имеем две итерируемые переменные вместо одной, и система, описываемая отображением Энона, является консервативной, а не диссипативной. Поскольку у нас два уравнения, необходимо ввести временную переменную xx для нового значения x, в то время пока текущее значение x используется еще во втором уравнении. Тот факт, что описываемая динамическая система консервативна, означает, что предварительный итерационный цикл для исключения промежуточных значений в неустановившемся режиме может быть опущен. Потери энергии, объясняющиеся трением или какими-либо другими факторами, здесь отсутствуют. Следовательно, здесь нет и аттракторов как таковых. Однако можно сказать, что каждая вычисленная системой орбита является своим собственным аттрактором. Как бы то ни было, странность (или хаос) определенно присутствует в отображении Энона. Наконец, отметим, что при любом значении параметра a результирующая система имеет множество орбит и благодаря свойству консервативности любая исходная пара значений x и y будет представлять точку, уже находящуюся на одной из орбит, таким образом, притяжение здесь является, если можно так выразиться, мгновенным. По этой причине в программе CHAOS2 не используются стандартные исходные значения для итерируемых переменных. Они должны быть введены перед выполнением основного цикла.

Построение программы CHAOS2 завершается, если перед ее основной частью поставить инструкцию ввода, позволяющую программисту выбрать значение a. Как и в программе CHAOS1, каждое новое значение a приводит к новой системе. Но поскольку система двумерна, выборка орбит занимает все свободное место и мы не можем теперь систематически варьировать параметр a, не вызывая на экране такого хаоса, который уже нежелателен.

Поэтому пользователь программы CHAOS2 задает исходную орбиту, вводя координаты одной из ее точек. Затем, откинувшись в кресле, он может с интересом наблюдать, как на экране возникает орбита. Она может оказаться кривой линией (нарисованной как бы пунктиром), либо чем-то более необычным. Например, на нижнем рисунке на с. 98 показана последовательность из 38 орбит, построенных с использованием отображения Энона, со значением a, равным 1,111. При постепенном удалении от центра изображения видим, как орбиты образуют гнездо из замкнутых траекторий, затем внезапно появляются маленькие «островки»: отдельные орбиты, вклинившиеся между более крупными, вложенными друг в друга орбитами. Двигаясь дальше, мы видим, как продолжается рисунок из вложенных орбит, сменяющийся хаосом. Во внешних частях изображения опять появляются островки вперемешку с кластерами случайно разбросанных точек, предвещающих наступление хаоса. Одна из хаотических областей (заключенная на рисунке в прямоугольную рамку) показана в увеличенном виде. Читателям, которые захотят рассматривать диаграммы Энона в увеличенном масштабе, мы советуем пользоваться самыми точными арифметическими операциями, имеющимися на их компьютерах.

Как я уже говорил выше, отображения Энона представляют широкое многообразие консервативных физических систем, например таких, как астероиды, движущиеся по орбитам вокруг Солнца. К сожалению, орбиты на наших диаграммах — это не те орбиты, по которым движутся астероиды, а лишь фазовые их представления. На только что рассмотренных диаграммах по горизонтальной оси можно откладывать параметр, характеризующий положение астероида в пространстве, например расстояние до Солнца; по вертикальной оси можно откладывать скорость в радиальном направлении, или скорость изменения расстояния до Солнца. Каждая точка орбиты, вычисленной при помощи отображения Энона, представляет пару величин: расстояние до Солнца и скорость астероида, движу-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

щегося под определенным углом по отношению к направлению на Солнце, т. е. когда астероид проходит через вертикальную плоскость, составляющую этот угол с направлением на Солнце. Последовательные точки, вычисленные при помощи отображения, представляют последовательные появления астероида на этой плоскости. Островки, упомянутые выше, — это резонансные полосы, возникающие из-за возмущений орбиты астероида более крупными телами Солнечной системы, такими, как Юпитер. В хаотических областях положение и скорость астероида будут изменяться, по существу, случайным образом каждый раз, когда астероид будет вновь появляться на плоскости. Его движение непредсказуемо.

С эстетической точки зрения заслуживают внимания некоторые другие изображения, полученные при помощи отображений Энона. Независимо от их физической интерпретации, они выглядят весьма своеобразно, напоминая какие-то причудливые водные организмы (см. рисунок на с. 99).

Читатель из голландского города Лейден П. де Йонг предложил недавно некоторые интересные итерационные формулы, генерирующие весьма своеобразные формы и изображения. Он рекомендует обратить внимание на следующие формулы с четырьмя параметрами:

$$x \leftarrow \sin(ay) - \cos(bx)$$
$$y \leftarrow \sin(cx) - \cos(dy)$$

Начинаем с нулевых значений x и y. Затем, чтобы получить изображение того, что де Йонг называет «цыплячьими ножками», подставим $a = 2{,}01$; $b = -2{,}53$; $c = 1{,}61$ и $d = -0{,}33$. При значениях этих параметров соответственно $-2{,}7$; $-0{,}9$; $-0{,}86$; $-2{,}2$ получим «катапульту», стреляющую точками», а если их значения равны $-2{,}24$; $0{,}43$; $-0{,}65$ и $-2{,}43$, то можно увидеть «пасхальное яичко, украшающее само себя».

Подобно де Йонгу, читатели могут изобретать свои собственные итерационные формулы и экспериментировать с ними.

Читатели с «одноколейными умами» теперь уже наверняка решили задачу, предложенную в прошлом номере журнала, где требовалось поменять местами два железнодорожных вагона, между которыми находился мост. Вагоны стояли на круговом пути, а локомотив был на другом пути, соединяющемся с круговым стрелкой. Мост достаточно прочен, чтобы выдержать только один вагон; локомотива он не выдержит. Каким образом локомотив сможет поменять вагоны местами?

Локомотив заходит на круговой путь, подходит к вагону A и заталкивает его на мост. Затем он пятится назад, подходит к вагону B, прицепляет его, подводит к краю моста и сцепляет вагоны A и B. Далее локомотив и прицепленные к нему вагоны, пройдя через стрелку, выезжают на прямой путь, где вагон A отцепляется. Теперь локомотив опять подводит вагон B к мосту и, отцепив, оставляет его там. Наконец, локомотив проходит по кругу, стягивает вагон B с моста, оставляет его на новом месте и возвращается за вагоном A.

В июньском номере журнала в статье, посвященной компьютерной музыке, я предложил читателям поразмыслить, каким образом можно получить неповторяющиеся последовательности нот, выбирая числа по модулю m. Выборку следует начинать с исходного числа и далее все время умножать имеющееся число на a, прибавлять b и брать остаток от деления полученного результата на m. Если числа a и m не имеют общего множителя большего единицы, то последовательность будет максимально длинной. Она также порождает самую необычную музыку.

П. де Йонг отмечает, что при помощи хаоса ему удавалось создавать очень странную музыку. Читатели и сами могут синтезировать аналогичные звуки, превращая числа, которые генерирует программа CHAOS2 в музыкальные ноты. Вне хаотических зон будут получаться простые, повторяющиеся музыкальные фразы, внутри же этих зон музыка будет воплощением хаоса.

Наука и общество

Недостаток места

Ученые, занимающиеся исследованием космического пространства, критикуют Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства (НАСА), выдвинувшее новый двухэтапный план размещения орбитальной станции. В новом варианте программы уменьшено число обитателей станции, а это означает, что масштабы исследований сократятся по сравнению с тем, что ожидалось. «Заселение» станции откладывается до 1996 г., что на два года позже срока, который был предусмотрен проектом, одобренным президентом Рейганом в 1984 г.

Новый график (кстати, не первое препятствие на пути нормального хода работ по проекту) НАСА вынуждено было принять в связи с тем, что, по некоторым оценкам, стоимость станции, о которой было объявлено в прошлом году, возросла с 8 до 14,5 млрд. долл. в ценах 1984 г. (или до 21 млрд. долл. в ценах 1987 г.). Белый дом, вмешавшийся в развитие событий в начале этого года, высказался за двухэтапную программу. Расходы на первом этапе, предусматривающем вывод на орбиту станции всего лишь с одной научной лабораторией для американских исследователей и одним жилым модулем, должны составить 12,2 млрд. долл. (в ценах 1984 г.). Решено отказаться на этом этапе от планировавшегося ранее одновременного запуска на ту же орбиту платформы с приборами и «ангара» для обслуживания спутников. Предусматривается также, что в этом космическом комплексе будут сделаны всего два «гнезда» для научных приборов. Мощность энергоблока составит лишь 50 кВт, из них 30 кВт потребуются для систем жизнеобеспечения.

Еще до того как НАСА объявило о последних изменениях в программе, среди ученых имелись серьезные разногласия по поводу его планов. Задержка программы запуска шаттлов, вызванная гибелью «Челленджера», отодвинет сроки вывода в космическое пространство ряда научных стан-